Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2019

Übungsblatt 6

Wir haben nun eine zusätzliche Struktur auf Vektorräumen definiert. Wenn auf einem Raum ein Skalarprodukt existiert, dann sprechen wir von einem euklidischen Raum. In diesem Fall kann man in Analogie zu $\mathbb{R}^n$ auch die Norm (oder Länge) eines Vektors definieren und man nennt zwei Vektoren orthogonal, wenn deren Skalarprodukt 0 ist.

In $\mathbb{R}^n$ gilt für das Standardskalarprodukt zweier Vektoren

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\varphi,$$

wobei φ der Winkel zwischen $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ ist. Daraus folgt gleich $|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leq |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$. Auch in allgemeinem euklidischem Raum gilt für alle Vektoren $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|.$$

Das ist die berühmte Cauchy-Bunjakowski-Schwarz-Ungleichung, die die Namensgeber unabhängig für Spezialfälle gezeigt haben und deren Beweis im Allgemeinen die Aufgabe 1 (a) ist.

Präsenzaufgabe

Diese Aufgabe ist nicht abzugeben und wird am 6. und 7. Juni in den Übungen besprochen.

1. Beweisen Sie die nachstehenden Aussagen:

(a) Für alle $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt:

$$\langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, A^T \boldsymbol{v} \rangle.$$

(b) Für alle $Q \in O(n)$ und $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|Q\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{u}|.$$

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik II für Ingenieure“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Dienstag, der 18. Juni 2019, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Es sei V ein euklidischer Raum.

(a) Zeigen Sie die Cauchy-Bunjakowski-Schwarz-Ungleichung, indem Sie sich die Ungleichung

$$\|\boldsymbol{u} - \alpha \boldsymbol{v}\|^2 \geq 0 \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\|\boldsymbol{v}\|^2}.$$

für beliebige $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ anschauen.

(b) Beweisen Sie die Dreiecksungleichung

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$$

für alle $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$.

2. Es sei V der Vektorraum alle Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad höchstens 2.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\, dx$$

ein Skalarprodukt auf V definiert ist.

(b) Finden Sie eine Orthonormalbasis für V, indem Sie auf die Basis $(1, x, x^2)$ das Gram-Schmidt'sche Verfahren anwenden.

3. Wir schreiben das Gauß'sche Eliminationsverfahren als eine Reihe von Multiplikationen der gegebenen Matrix um. Es sei am Anfang eine Matrix $A =: A^{(1)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben. Im k-ten Schritt nehmen wir die Matrix $A^{(k)}$ und bekommen durch das Abziehen von Vielfachen der k-ten Zeilen die Matrix $A^{(k+1)}$, so dass die Einträge $a_{ik}^{(k+1)} = 0$ für $i = k+1, \dots, n$ erfüllen.

(a) Zeigen Sie, dass der k-te Schritt der Multiplikation (von links) mit der Matrix

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k}^{(k)} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{n,k}^{(k)} & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } l_{i,k}^{(k)} := \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}, \quad i = k+1, \dots, n,$$

entspricht. (Alle anderen Einträge sind 0.)

(b) Zeigen Sie

$$(L^{(k)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{k+1,k}^{(k)} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{n,k}^{(k)} & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Zeigen Sie, dass man somit die „LU-Zerlegung“ der Matrix A bekommt, d. h. man kann A schreiben als $A = LU$, wobei $L := (L^{(n-1)} \dots L^{(1)})^{-1}$ eine untere und $U := A^{(n)}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Sie dürfen annehmen, dass $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ für alle $k = 1, \dots, n$. Ansonsten müsste eine Zeilenvertauschung durchgeführt werden. Mehr dazu auf dem nächsten Blatt.

4. Zeigen Sie, dass durch $\underline{G} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ mit

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ gegeben ist. Seien

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

in der Standardbasis gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe der Transformationsmatrix die Darstellung von $\boldsymbol{v}$ und B in der Basis $\underline{G}$.